

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I BÜTÜNLEME SINAVI

- 1) $(2x + y \cos(xy))dx + x \cos(xy)dy = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.
- 2) Birinci mertebeden birinci dereceden bir **lineer diferansiyel denklem** yazınız ve denklemin genel çözümünü bulunuz (Derste çözülen örnekler kabul edilmeyecektir).
- 3) $(y')^2 + (2y - 3x^2)y' - 6x^2y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.
- 4) $2y = (y')^2 + 2xy'$ diferansiyel denklemi verilsin. Buna göre
- a) genel çözümünü b) varsa tekil çözümünü c) çözüm ailesinin varsa zarfını bulunuz.

Süre: 90 dakikadır.

Başarılar.

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Cevaplar

$$(1) \frac{(2x + y \cos(xy))dx}{M(x,y)} + \frac{x \cos(xy)dy}{N(x,y)} = 0$$

$$M_y = \cos(xy) - y \cdot x \sin(xy) \stackrel{!}{=} N_x = \cos(xy) - x \cdot y \sin(xy)$$

olduğu için denklem tam difer denklemdir.

Gruplandırma yapılırsa

$$2x dx + (y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy) = 0$$

$$2x dx + d(\sin(xy)) = d(c) \Rightarrow x^2 + \sin xy = c \quad \text{genel çözüm}$$

$$\text{veya } \int (2x + y \cos(xy)) dx + \int (x \cos(xy)) dy = \int 0$$

$$x^2 + y \cdot \frac{1}{y} \sin(xy) + x \cdot \frac{1}{x} \sin(xy) = c, \text{ aynı obanbrdan biri çıkar}$$

$$x^2 + \sin(xy) = c \text{ genel çözümdür.}$$

$$(2) y' + p(x)y = \theta(x) \quad \text{1. mertebeden 1. dereceden lineer denklemdir}$$

$$y' - \frac{1}{x^2}y = e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{lineer denklemi için}$$

$$\lambda(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x^2} dx} = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{olmak üzere genel}$$

$$\text{çözüm } y \cdot \lambda(x) = \int \theta(x) \lambda(x) dx + c$$

$$y \cdot e^{\frac{1}{x}} = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx + c \Rightarrow y \cdot e^{\frac{1}{x}} = x + c$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}} (x + c) \quad \text{dur.}$$

(3) $(y')^2 + (2y - 3x^2)y' - 6x^2y = 0$ $y' = p$ dersek y üstele dereden der abakken

$p^2 + 2yp - 3x^2p - 6x^2y = 0 \Rightarrow p(p + 2y) - 3x^2(p + 2y) = 0$
 $(p + 2y)(p - 3x^2) = 0$ olup buradan

• $p + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y$ 1M, 1D den derden der
 $\frac{dy}{y} = -2dx \Rightarrow \ln y = -2x + c_1 \Rightarrow y = c \cdot e^{-2x}$ ($e^c = c$)

• $p - 3x^2 = 0 \Rightarrow y' = 3x^2$ 1M, 1D den derden der
 $dy = 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + c$

Genel gözden $(y - ce^{-2x})(y - x^3 - c) = 0$ bulur.

(4) $2y = (y')^2 + 2xy'$, $y' = p$ dersek $2y = p^2 + 2xp$
 $y = xp + \frac{p^2}{2}$ ($y' = xp + f(p)$ formu)

Da oldugu için Clairaut denklemdir

(a) $p = c$ için genel gözden $y = xc + \frac{c^2}{2}$ dir.

(b) $x = -f'(p)$ } $f(p) = \frac{p^2}{2}$ için $f'(p) = p$ olup
 $y = -f'(p)p + f(p)$ } $x = -p$
 $y = -p \cdot p + \frac{p^2}{2} = -\frac{p^2}{2} \Rightarrow x^2 = p^2 = -2y$
 $y = -\frac{x^2}{2}$ tekil yer.

$f''(p) = 1 \neq 0$ olduğu için $y = -\frac{x^2}{2}$ tekil gözden der.

(c) $y = -\frac{x^2}{2}$ tekil gözdeni zarf nedir?

$y = -\frac{x^2}{2}$, $y = xc + \frac{c^2}{2}$ için $\Rightarrow -\frac{x^2}{2} = cx + \frac{c^2}{2}$
 $\Rightarrow c^2 + 2cx + x^2 = 0$
 $(c+x)^2 = 0$

$c = -x$ çift kök olduğu için tekil gözden zarftr

$y = -\frac{x^2}{2}$ zarftr.